Grado en Matemáticas y Doble Grado en Física y Matemáticas
Análisis Funcional – Convocatoria Extraordinaria – Febrero 2021

1. Sea X el espacio normado de las funciones reales continuas en $[0,1]$ que se anulan en cero con la norma del máximo

$$X = \{f \in C[0,1] : f(0) = 0\}, \quad \|f\|_\infty = \text{máx}\{|f(t)| : 0 \leqslant t \leqslant 1\}$$

En X se considera el funcional lineal $\varphi : X \to \mathbb{R}$ dado por:

$$\varphi(f) = \int_0^1 t f(t)\, \mathrm{d}t \qquad (f \in X)$$

a) (1 punto) Calcula $\|\varphi\|$.

b) (0,5 puntos) Prueba que φ no alcanza su norma.

2. Sea $T : c_0 \to \ell_2$ el operador lineal definido para todo $x \in c_0$ por

$$[Tx](n) = \frac{x(n)}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

a) (1 punto) Calcula su norma y prueba que T no la alcanza.

b) (0,5 puntos) Prueba que $Y = T(c_0)$ es un subespacio denso en ℓ_2 y que T es una biyección lineal de c_0 sobre Y.

c) (0,5 puntos) ¿Es continua la aplicación $T^{-1} : Y \to c_0$? ¿Es Y cerrado en ℓ_2?.

3. (1,5 puntos) Sean X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $\mathcal{F}$ un subconjunto de $L(X,Y)$. Prueba que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $\mathcal{F}$ está acotado.

b) Para cada $x \in X$ y cada $g \in Y^*$ el conjunto $\{g(T(x)) : T \in \mathcal{F}\}$ está acotado.

4. (0,5 puntos cada una) Responde a las siguientes cuestiones indicando en cada caso, según proceda, un resultado de teoría que justifique tu respuesta o un contraejemplo, o bien dando una prueba.

a) ¿Puede definirse alguna norma completa en el espacio vectorial c_{00} de las sucesiones casi nulas?

b) Si H es un espacio de Hilbert y M es un subespacio de H verificando que $M^\perp = \{0\}$, entonces $M = H$.

c) Sea $\{f_n\}$ una sucesión puntualmente acotada de funcionales lineales continuos en un espacio de Banach X, definiendo $T(x) = \{f_n(x)\}$ se obtiene un operador lineal continuo de X en ℓ_∞.

d) Sean $\|\,.\,\|$ y $|\!|\!|\,.\,|\!|\!|$ dos normas completas no equivalentes en un espacio vectorial X. Entonces la aplicación identidad $I_X : (X, \|\,.\,\|) \to (X, |\!|\!|\,.\,|\!|\!|)$ no es continua.

5. (3 puntos) Escribe sobre uno de los siguientes temas:

a) Ortogonalidad. Teorema de la proyección ortogonal. Teorema de Riesz-Fréchet.

b) Separación de conjuntos convexos en espacios normados.

c) Lema de categoría de Baire. Teorema de Banach-Steinhaus.